

Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

aula 3

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

Cap. 1 – Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

- 1.1 Introdução
- 1.2 Relaxações
- 1.3 Resolução exata de problemas
 - Algoritmo de *branch-and-bound*
 - Algoritmo de planos de corte
- 1.4 Utilização de software

Bibliografia

- F.S. Hillier; G.J. Lieberman, Introduction to Operations Research, 9th ed., McGraw-Hill, 2009.
- L. Wolsey, Integer Programming, John Wiley & Sons, 1998.

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Aplicações

Análise de Investimentos

Uma companhia tem um orçamento de b *u.m.* para investimentos no próximo ano e identificou n projetos indivisíveis. Cada projeto j proporciona, uma receita de c_j e requer um investimento de a_j .

Formule o problema supondo que se pretende maximizar a receita total.

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Aplicações

Análise de Investimentos

Uma companhia tem um orçamento de b *u.m.* para investimentos no próximo ano e identificou n projetos indivisíveis. Cada projeto j proporciona, uma receita de c_j e requer um investimento de a_j .

Formule o problema supondo que se pretende maximizar a receita total.

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. a: } &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \\ x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Problema da} \\ \text{mochila} \end{array}$$

✓ O problema da mochila é NP-difícil.

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Bound

- PLI de Minimização: $z^* = \text{Min}\{c x: x \in S\}$ ($S \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$)
- Pretendemos “partir” o problema inicial em problemas mais fáceis de resolver e que nos levem à resolução do problema inicial!
- Decompondo S em subconjuntos mais pequenos:

$$S = \bigcup_{k=1}^K S_k$$

e considerando $Z^k = \text{Min}\{c x: x \in S_k\}$

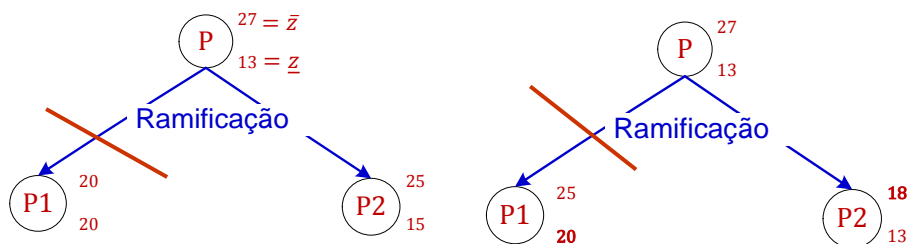
então, $Z^* = \min_k z^k$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Bound

- PLI de Minimização: Cancelamento de ramificação a partir de um nó



i. SO do subproblema

iii. Subproblema impossível!

ii. Subproblema de valor nunca melhor que o de P2

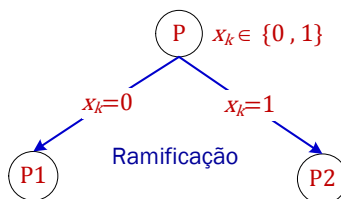
- Obtenção dos limites para os valores de cada subproblema:
 - Majorantes – SA primais
 - Minorantes – relaxações; dualidade

Branch & Bound

Questões:

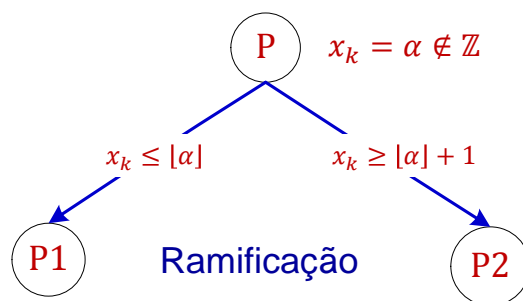
- Como escolher os subconjuntos S_k ?
- Qual a regra de partição/ramificação?
- A partir de cada nó devemos dividir a resolução em dois ou mais nós?
- Por que ordem se devem analisar os subproblemas em estudo?
- Quais as regras para obtenção de limites?

Programação Binária:



Branch & Bound

Programação Inteira:



$$S_1 = S \cap \{x: x_k \leq \lfloor \alpha \rfloor\}$$

$$S_2 = S \cap \{x: x_k \geq \lfloor \alpha \rfloor + 1\}$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Bound

➤ Gráficamente - PLR

$$\text{Min } z = x_1 - 2x_2$$

s.a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Bound

➤ Gráficamente - PLR

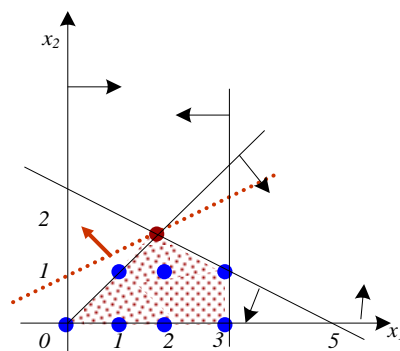
$$\text{Min } z = x_1 - 2x_2$$

s.a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_{RL} = (x_1^{RL}, x_2^{RL}) = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

$$\underline{z} = z_{RL} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = z(0,0)$$



OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Bound

$$x_{RL} = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3} \right)$$

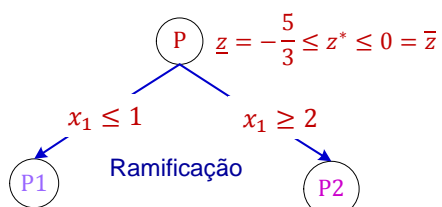
$$\textcircled{P} \quad z = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \bar{z}$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

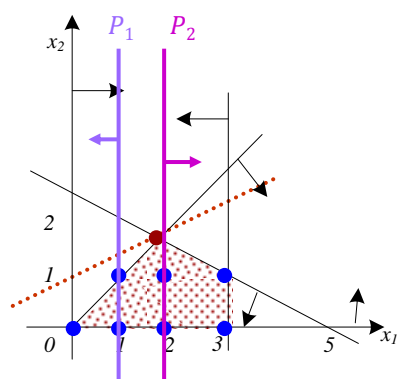


Branch & Bound

$$x_{RL} = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3} \right)$$



$$\text{Min } z = x_1 - 2x_2$$



OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Bound

$P \quad z = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \bar{z}$
 $x_1 \leq 1$ $x_1 \geq 2$
 P1 Ramificação P2

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2017/18

66

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Bound

$P \quad z = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = \bar{z}$
 $x_1 \leq 1$ $x_1 \geq 2$
 P1 Ramificação P2

$x = (1; 1)$
 $z_1 = -1$

SA! Fim \Rightarrow atualização do majorante:
 $\bar{z} = z_1 = -1$

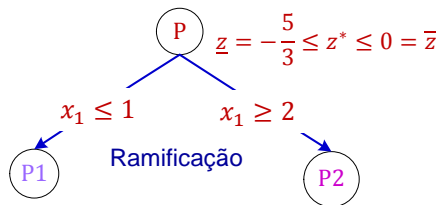
SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2017/18

67

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



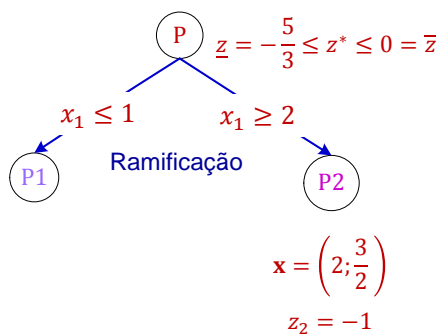
Branch & Bound



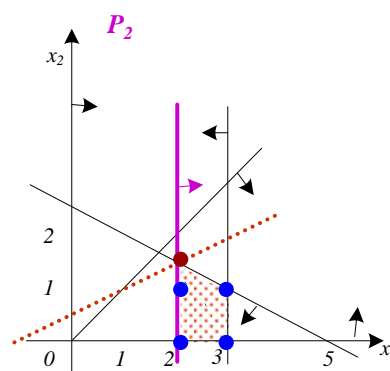
OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Bound



Fim \Rightarrow valor igual ao do majorante!



Branch & Bound

0. Fazer: $P_0 \leftarrow PLR$; $S_0 \leftarrow S$; $ns \leftarrow 0$ {contador do número de subproblemas}

1. Resolver P_0

Se a SO de P_0 é admissível de PLI, **FIM** (é também SO de PLI)

c.c. criar a raiz da árvore com o subproblema P_0 e respetiva solução; $k \leftarrow 0$ {nº subproblema em análise}

2. {Ramificação} Ramificar P_k em dois subproblemas:

Seja $x_r = \alpha \notin \mathbb{Z}$. Incluir na árvore os dois novos subproblemas por resolver:

$$(P_{ns+1}) \quad z_{ns+1} = \text{Min}\{\mathbf{cx} : \mathbf{x} \in S_{ns+1}\} \quad \text{com } S_{ns+1} = S_k \cap \{\mathbf{x} : x_r \leq \lfloor \alpha \rfloor\}$$

$$(P_{ns+2}) \quad z_{ns+2} = \text{Min}\{\mathbf{cx} : \mathbf{x} \in S_{ns+2}\} \quad \text{com } S_{ns+2} = S_k \cap \{\mathbf{x} : x_r \geq \lfloor \alpha \rfloor + 1\}$$

Fazer $ns \leftarrow ns + 2$

3. **Se** existirem subproblemas por resolver: resolver um qualquer desses subproblemas, seja P_k , **Ir para 4**

c.c. **FIM** (SO: melhor SA encontrada)

4. {Limitação}

Se P_k é impossível **ou** tem valor ótimo $z_k \geq \bar{z}$ cancelar a pesquisa nesse ramo, **Ir para 3**

c.c., **Se** a SO de P_k for SA do PLI cancelar a pesquisa nesse ramo e **Ir para 5**

c.c. **Ir para 2**

5. **Se** $z_k < \bar{z}$ atualizar: $\bar{z} \leftarrow z_k$ e considerar a SO de P_k como melhor SA

6. **Se** $\underline{z} = \bar{z}$ **FIM** (a S.O. é a solução com valor $\underline{z} = \bar{z}$)

c.c. **Ir para 3**

Branch & Bound

Regras:

➤ Escolha da variável para a ramificação:

➤ Variável de menor/maior índice

➤ Variável mais fracionária:

$$\text{Sendo } f_j = x_j - \lfloor x_j \rfloor$$

$$\text{escolher: } \arg \max_j \{\min(f_j, 1 - f_j)\}$$

➤ Escolha do nodo para analisar (problema P_k):

➤ *Depth-first*

➤ Escolher o nó com o melhor valor de z_k (valor mais baixo)

Exercícios

3. Escrever o método de *branch and bound* (B&B) considerando o problema inicial de Maximização.

4. Resolva recorrendo ao B&B os seguintes exercícios:

a) $Max z = 5x_1 + 4x_2$

$$\text{s.a: } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1 - x_2 \leq 16 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_j \in \mathbb{Z}_0^+ \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

b) $Min z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5$

$$\text{s.a: } \begin{cases} x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -2 \\ 5x_1 - x_2 + x_5 \geq 7 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \text{ inteiros} \end{cases}$$

[Solver](#)

Trabalho 2

A. Resolva o problema seguinte utilizando o B&B e ramificando escolhendo:

$$Max z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5$$

$$\text{s.a: } \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 15 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 22 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 13 \\ x_j \in \mathbb{Z}_0^+ \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

- a variável mais fracionária.
- a variável diferente da escolhida em i. e de índice mais baixo possível.

B. Suponha que ao resolver A.i. o critério de paragem era “resolver não mais de quatro subproblemas”. Escreva e classifique a solução correspondente.

C. Formule e resolva recorrendo ao B&B o exercício 11.3-4 (pg. 525) do Hillier and Lieberman.